Calcul des $\zeta(2k)$

Soit $f : z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \dfrac{z^n}{n!}$ au voisinage de 0.

Thm : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \dfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$.

· Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$. Posons $\varphi : x \mapsto e^{zx/2\pi}$ sur $]-\pi, \pi]$, 2π-pér sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{zx/2\pi} e^{-inx} dx = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\frac{z}{2\pi} - in} \left[e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \dfrac{(-1)^n}{z - 2i\pi n} \left(e^{z/2} - e^{-z/2} \right)$.

Puisque φ $\mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R})$, le thm de Dirichlet assure :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}(\varphi(x^+) + \varphi(x^-)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\varphi) e^{inx}$.

Pour $x = \pi$; $\dfrac{e^{-z/2} + e^{z/2}}{2} = (e^{z/2} - e^{-z/2}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$

donc $\dfrac{1}{2} \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1} = \dfrac{1}{z} + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$

Or $\dfrac{1}{2} \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e^z - 1}$ donc $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1} = 1 - \dfrac{z}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$

· D'autre part, si $z \in D(0, 2\pi)$, $\dfrac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \dfrac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\dfrac{z^2}{4\pi^2 n^2} \right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\dfrac{z}{2\pi n} \right)^{2k}$

Posons $u_{n,k} = (-1)^{k+1} \left(\dfrac{z}{2\pi n} \right)^{2k}$. Par Fubini - Tonelli :

$\sum_{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} |u_{n,k}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{|z|}{2\pi n} \right)^{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|z|^2}{(2\pi n)^2 - |z|^2} < \infty$

Donc par Fubini, si $z \neq 0$, $f(z) = 1 - \dfrac{z}{2} + 2 \sum_{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} u_{n,k} = 1 - \dfrac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) z^{2k}$

Toujours vrai pour $z = 0$: $f(z) = 1 - \dfrac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}} z^{2k}$.

Par unicité du DSE, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{2k}}{(2k)!} = 2 \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$ i.e. $\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \dfrac{(2\pi)^{2k}}{2 (2k)!} b_{2k}$.

Fait : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k \in \mathbb{Q}$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z)(e^z - 1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{b_k}{k!} \dfrac{1}{(n-k)!} \right) z^n$.

Par unicité du DSE, $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$, i.e. $b_{n-1} = \dfrac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$.